

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha=9$

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$

Μονάδες 10

Λύση:

α. $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7)' = 3x^2 - 12x + \alpha$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 12x + \alpha)' = 6x - 12$$

Αντικαθιστώντας στην $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$ παίρνουμε:

$$2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

β. Αφού δείξαμε πως $\alpha=9$ η πρώτη παράγωγος γίνεται:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3). \text{Επομένως:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{(x+1)} = \frac{3(1-3)}{1+1} = \frac{3(-2)}{2} = -3$$

γ. Γνωρίζουμε ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης λ , οπότε $\lambda = -3$. Ομως επιπλέον γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με την παράγωγο στο σημείο επαφής, οπότε αν αυτό είναι το $(x_0, f(x_0))$ έχουμε:

$$f'(x_0) = \lambda \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ και}$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = -5$$

Αρα το σημείο επαφής είναι το $(2, -5)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής: $y = -3x + \beta$ οπότε απομένει να προσδιορίσω το β .

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, οπότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$$-5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -5 + 6 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι η: $y = -3x + 1$.