2009 ΘΕΜΑ 4ο Ανάλυση-Στατιστική-Πιθανότητες

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$, x>0 όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 6**

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$R=3+\ln\frac{1}{4}$ και $\delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$ **Μονάδες 7**

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,\ldots,100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{\lambda\in\Omega \mid R+\delta<-2\}$ **Μονάδες 6**

Λύση:

$$f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$$

Α. α. $$f'(x)=\left(\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2>x\Leftrightarrow x<2$$

x	0	2	∞
$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$	+	0	-
$f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$	↗		↘

Αρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι:

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,2]$ και

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

β. Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (που είναι και ολικό) για x=2, το:

$$f(2)=\ln 2-\frac{2}{2}+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1$$

Β. α. Αφού η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$, αφού 2<3<4<5<8 θα έχουμε :

$f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$.

Αρα είναι:

$$R=f(2)-f(8)=\ln 2-\frac{2}{2}+\lambda^2-6\lambda+2-\left(\ln 8-\frac{8}{2}+\lambda^2-6\lambda+2\right)=$$

$$\ln 2-\frac{2}{2}+\lambda^2-6\lambda+2-\ln 8+\frac{8}{2}-\lambda^2+6\lambda-2=\ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+2-\ln 8+4-\lambda^2+6\lambda-2=$$

$$=\ln 2-\ln 8+3=3+\ln\frac{2}{8}=3+\ln\frac{1}{4}.$$

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττού αριθμού η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση αν διαταχθούν κατά αύξουσα σειρά:

$f(8)<f(5)<f(4)<f(3)<f(2)$

$$\delta=f(4)=\ln 4-\frac{4}{2}+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 4-\frac{4}{2}+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 4-2+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

β. $R+\delta<-2 \Leftrightarrow 3+\ln\frac{1}{4}+\ln 4+\lambda^2-6\lambda<-2 \Leftrightarrow 3-\ln 4+\ln 4+\lambda^2-6\lambda<-2 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+5<0$.

α=1 , β= -6 γ=5

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{6+4}{2}=\dfrac{10}{2}=5\\[2mm] \lambda_2=\dfrac{6-4}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Αρα $\lambda^2-6\lambda+5<0 \Leftrightarrow 1<\lambda<5$

Επειδή το λ παίρνει τιμές στο Ω έχουμε $\lambda\in\{2,3,4\}$ επομένως $A=\{2,3,4\}$, συνεπώς $N(A)=3$ και

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{100}.$$

Σημείωση: Αν και δεν ζητείται παραθέτω την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$ για λ=0 δηλαδή της συνάρτησης $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+2$