2010 Επαναληπτικές ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{300s^2}(t-\bar{x})^3 \qquad t \in \mathbb{R} \text{ και } s \neq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t=\bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του. **Μονάδες 6**

Δ3. Αν $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **Μονάδες 8**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_\nu)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$. **Μονάδες 6**

Λύση:

Δ1. $f'(t) = \left(\frac{1}{300s^2}(t-\bar{x})^3\right)' = \frac{1}{300s^2}\left((t-\bar{x})^3\right)' = \frac{1}{300s^2}3(t-\bar{x})^2(t-\bar{x})' = \frac{1}{300s^2}3(t-\bar{x})^2 =$

$\frac{1}{100s^2}(t-\bar{x})^2 > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R} - \{\bar{x}\}$.

Επομένως η $f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολή της $f(t)$ είναι η $f'(t)$. Για να μελετήσουμε την $f'(t)$ βρίσκουμε την παράγωγό της:

$$(f'(t))' = \left(\frac{1}{100s^2}(t-\bar{x})^2\right)' = \frac{1}{100s^2}\left((t-\bar{x})^2\right)' = \frac{1}{100s^2}2(t-\bar{x})^1(t-\bar{x})' = \frac{1}{100s^2}2(t-\bar{x}) = \frac{1}{50s^2}(t-\bar{x})$$

$$(f'(t))' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50s^2}(t-\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow t-\bar{x} = 0 \Leftrightarrow t = \bar{x}$$

$$(f'(t))' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50s^2}(t-\bar{x}) > 0 \Leftrightarrow t-\bar{x} > 0 \Leftrightarrow t > \bar{x}$$

x	0		$\bar{x}$		$+\infty$
$(f'(t))'$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$	$+\infty$	↘	$f'(\bar{x})=0$	↗	$+\infty$

Αρα ο ρυθμός μεταβολής παίρνει ελάχιστη τιμή για $t=\bar{x}$ την $f'(\bar{x}) = \frac{1}{100s^2}(\bar{x}-\bar{x})^2 = \frac{1}{100s^2}\cdot 0 = 0$

Δ3. $f'(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{100s^2}(0-\overline{x})^2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{100s^2}\overline{x}^2=1 \Leftrightarrow \frac{\overline{x}^2}{s^2}=100 \Leftrightarrow \frac{s^2}{\overline{x}^2}=\frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{s}{\overline{x}}\right)^2=\frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\left(\frac{s}{\overline{x}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{100}} \Leftrightarrow \left|\frac{s}{\overline{x}}\right|=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{|s|}{|\overline{x}|}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{|\overline{x}|}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow CV=\frac{1}{10}=10\%$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ4. $\overline{x}_{f'(t)}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} f'(t_i)=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{(t_i-\overline{x})^2}{100s^2}=\frac{1}{100s^2}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{(t_i-\overline{x})^2}{\nu}=\frac{1}{100s^2}s^2=\frac{1}{100}$.