2010 ΘΕΜΑ Δ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες P(A), P(B) και η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)-\frac{1}{2}\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2+\mathrm{P}(\mathrm{B}),\ x>\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 13**

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι:

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{2}{3}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$ **Μονάδες 2**

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A , B. **Μονάδες 5**

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A , B. **Μονάδες 5**

Λύση:

Δ1. $f'(x)=\dfrac{1}{x-\mathrm{P}(\mathrm{A})}\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)'-\dfrac{1}{2}2\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)'+0=\dfrac{1}{x-\mathrm{P}(\mathrm{A})}-\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right),\ x>\mathrm{P}(\mathrm{A})$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2}{x-\mathrm{P}(\mathrm{A})}=0\Leftrightarrow 1-\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2=1\overset{x>\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\Leftrightarrow}x-\mathrm{P}(\mathrm{A})=1\Leftrightarrow x=1+\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2}{x-\mathrm{P}(\mathrm{A})}>0\overset{x>\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\Leftrightarrow}1-\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2>0\Leftrightarrow 1^2>\left(x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2\overset{x>\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\Leftrightarrow}1>x-\mathrm{P}(\mathrm{A})\Leftrightarrow x<1+\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

x	$\mathrm{P}(\mathrm{A})$		$1+\mathrm{P}(\mathrm{A})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

- Αρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\mathrm{P}(\mathrm{A}),1+\mathrm{P}(\mathrm{A})\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1+\mathrm{P}(\mathrm{A}),+\infty\right)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο στο $1+\mathrm{P}(\mathrm{A})$, το :

$$f\left(1+\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)=\ln\left(1+\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)-\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\right)^2+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\ln 1-\frac{1}{2}1^2+\mathrm{P}(\mathrm{B})=$$

$$0-\frac{1}{2}+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{2}$$

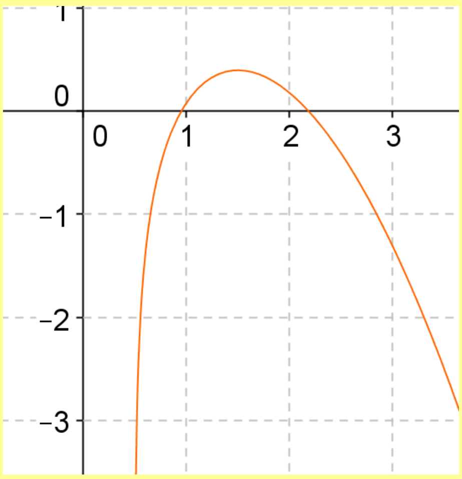
<u>Σημείωση</u>:Παραθέτω την γραφική παράσταση για $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0{,}5$ και $\mathrm{P}(\mathrm{B})=0{,}9$

Ουσιαστικά το $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ λειτουργεί ως οριζόντια μετατόπιση προς

Ουσιαστικά το $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ λειτουργεί ως οριζόντια μετατόπιση προς

τα δεξιά και το $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ ως κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2,\ x>0$$



Δ2. $x_0=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 1+\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{5}{3}\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{5}{3}-1\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{2}{3}$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\mathrm{P}(\mathrm{B})=0\Leftrightarrow \ln\frac{3}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\mathrm{P}(\mathrm{B})=0\Leftrightarrow$$

$$\ln 1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}\right)^2+\mathrm{P}(\mathrm{B})=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}1^2+\mathrm{P}(\mathrm{B})=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\mathrm{P}(\mathrm{B})=0\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$$

Δ3. $\mathrm{P}\left((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'\right)=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

Αρα πρέπει να υπολογίσω το $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$$

και αντικαθιστώντας:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Επομένως: $\mathrm{P}\left((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'\right)=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Δ4. $P\left((\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right)=P(A)-P(A\cap B)+P(\mathrm{B})-P(A\cap B)=P(A)+P(\mathrm{B})-2P(A\cap B)=$

$$P(A)+P(\mathrm{B})-2P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$