

2010 ΘΕΜΑ Β ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

Λύση:

$$\mathbf{B1.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left[\left(\sqrt{x^2 - x + 1}\right)^2 - 1^2\right]}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - x + 1 - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - x)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + 1} + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mathbf{B2.} \quad f'(x) = \left(2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\right)' = \cancel{2} \frac{(x^2 - x + 1)'}{\cancel{2} \sqrt{x^2 - x + 1}} - 0 = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\lambda = f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = -1$$

B3. $\lambda = \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \omega = 135^\circ$