2011 ΘΕΜΑ Β-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M)=\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι P(A)= $4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=-5\lambda+\frac{7}{4}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν για το πλήθος N(Ω) των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει 64<N(Ω)<72, τότε:

B1. Να δείξετε ότι N(Ω)=68 **Μονάδες 6**

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ **Μονάδες 8**

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

B4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

Λύση:

B1.Προφανώς κάθε μπάλλα έχει την ίδια προοπτική να επιλεγεί οπότε έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, επομένως ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας:

$$P(M)=\frac{N(M)}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{N(M)}{N(\Omega)}\Rightarrow N(\Omega)=4\cdot N(M)$$

$64<N(\Omega)<72\Rightarrow 64<4\cdot N(M)<72\Rightarrow\frac{64}{4}<\frac{4\cdot N(M)}{4}<\frac{72}{4}\Rightarrow 16<N(M)<18$ οπότε επειδή το $N(M)$ είναι φυσικός θα είναι $N(M)=17$ οπότε:

$$N(\Omega)=4\cdot N(M)=4\cdot 17=68$$

B2. $P(M)+P(A)+P(K)=1\Rightarrow\frac{1}{4}+4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}=1\Rightarrow 4\lambda^2-5\lambda+\frac{8}{4}=1\Rightarrow 4\lambda^2-5\lambda+2-1=0$

$$\Rightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$$

α=4, β=−5, γ=1

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot4\cdot1=25-16=9$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot4}=\frac{5\pm3}{2\cdot4}=\frac{5\pm3}{8}$$

$\lambda_1=\frac{8}{8}=1$ η τιμή αυτή απορρίπτεται γιατί δίνει $P(A)=4\lambda^2=4>1$

$$\lambda_2=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Άρα $\lambda=\frac{1}{4}$.

B3. Εχουμε δείξει ότι: $\mathrm{N}(\mathrm{M})=17$

Επειδή $\lambda=\frac{1}{4}$ είναι $\mathrm{P}(\mathrm{A})=4\left(\frac{1}{4}\right)^2=4\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

Ετσι $\frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{N}(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{N}(\Omega)}{4}=\frac{68}{4}=17$

$\mathrm{P}(\mathrm{K})=-5\lambda+\frac{7}{4}=-5\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Ετσι $\frac{\mathrm{N}(\mathrm{K})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{N}(\mathrm{K})=\frac{\mathrm{N}(\Omega)}{2}=\frac{68}{2}=34$

B4. $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.