2011 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	ν_i	f_i %	N_i	F_i %	$\nu_i x_i$
[25,)			x			
[,)			x+20			
[,)			2x			
[,)			x^2-6x	50		
ΣΥΝΟΛΟ						

Γ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες fi % i=1,2,3,4 **Μονάδες 6**

Γ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι δ=50 χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι c=10. **Μονάδες 8**

Γ3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών. **Μονάδες 6**

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια; **Μονάδες 5**

Λύση:

Γ1. $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100$ και αντικαθιστώντας με τις τιμές από τον πίνακα

$$x + x + 20 + 2x + x^2 - 6x = 100 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - 80 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 81 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow x - 1 = \pm 9 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \text{ ή } x - 1 = -9 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -8.$$

Επειδή ο x δεν μπορεί εδώ να είναι αρνητικός λύση είναι x=10

Αρα το πινακάκι μας συμπληρώνεται ως εξής:

$f_1\% = x\% = 10\%$

$f_2\% = (x+20)\% = (10+20)\% = 30\%$

$f_3\% = (2x)\% = (2\cdot 10)\% = 20\%$

$f_4\% = \left(x^2 - 4x\right)\% = \left(10^2 - 6 \cdot 10\right)\% = 40\%$

Γ2. Η 1η κλάση είναι [25 , 25+c) η 2η κλάση [25+c , 25+2c) η 3η κλάση [25+2c , 25+3c) και η 4η κλάση [25+3c , 25+4c).Από τα f_i% διαπιστώνω ότι το (10%+30%)=40% των ηλικιών είναι μικρότερα από την 25+2c και το (10%+30%+20%)=60% των ηλικιών είναι μικρότερα από 25+3c .Αρα η διάμεσος δ που είναι η ηλικία πρίν από την οποία βρίσκονται το 50% των ηλικιών και μετά από αυτή το 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται στην 3 κλάση και θεωρώντας ότι οι ηλικίες των εργαζομένων κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση, έχουμε ότι δ θα είναι το μέσο της 3ης κλάσης.

Το μέσο της 3ης κλάσης είναι $\dfrac{25+2c+25+3c}{2} = \dfrac{50+5c}{2}$.Αρα

$$\delta = \frac{50+5c}{2} \Leftrightarrow 50 = \frac{50+5c}{2} \Leftrightarrow 50+5c = 100 \Leftrightarrow 5c = 50 \Leftrightarrow c = 10$$

$$\nu = N_4 = 50$$

επομένως:

$$f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100 \Leftrightarrow \nu_i = \frac{\nu f_i\%}{100}$$

$$\nu_1 = \frac{\nu f_1\%}{100} = \frac{50 \cdot 10}{100} = 5$$

$$\nu_2 = \frac{\nu f_2\%}{100} = \frac{50 \cdot 30}{100} = 15$$

$$\nu_3 = \frac{\nu f_3\%}{100} = \frac{50 \cdot 20}{100} = 10$$

$$\nu_4 = \frac{\nu f_4\%}{100} = \frac{50 \cdot 40}{100} = 20$$

Γ3. Συμπληρώνουμε πλέον το πινακάκι:

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	ν_i	f_i %	N_i	F_i%	$x_i\ \nu_i$
[25 , 35)	30	**5**	10	5	10	150
[35 , 45)	40	**15**	30	20	40	600
[45 , 55)	50	**10**	20	30	60	500
[55 , 65)	60	**20**	40	50	100	1200
Σύνολο		**50**	**100**			**2450**

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{2450}{50}=\frac{245}{5}=49$$

Γ4. Αν πρέπει να προσληφθούν y υπάλληλοι που οι ηλικίες τους να ανήκουν στην πρώτη κλάση τότε το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 30y.Πλέον έχουμε:

$$\overline{x}_{\nu\acute{\varepsilon}\alpha}=40 \Leftrightarrow \frac{30y+2450}{50+y}=40 \Leftrightarrow 30y+2450=40(50+y) \Leftrightarrow 30y+2450=2000+40y$$

$$\Leftrightarrow 2000+40y=30y+2450 \Leftrightarrow 40y-30y=2450-2000 \Leftrightarrow 10y=450 \Leftrightarrow y=45$$