Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 8**

Δ2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και P(A), P(B) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A-B)$, $P(A \cup B)$, $P(B-A)$. **Μονάδες 8**

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x)=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}$$

α) Να λυθεί η εξίσωση f(x)=h(x). **Μονάδες 3**

β) Αν $x_1<x_2<x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i=2x_i+1$, i=1,2,3 οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. **Μονάδες 6**

Λύση:

Δ1. $f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}$ οπότε:

- $f'(x)=\left(e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\right)'=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x\right)'$

$=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\cdot\left(\frac{1}{3}3x^2-\frac{11}{30}2x+\frac{2}{15}\right)=$

$e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{5}x}\cdot\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right)$

- Γνωρίζουμε ότι $e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{5}x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{5}x}\cdot\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0 \Leftrightarrow$

$15x^2-11x+2=0$

$\alpha=15,\ \beta=-11,\ \gamma=2$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-11)^2-4\cdot15\cdot2=121-120=1$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{11\pm\sqrt{1}}{2\cdot15}=\frac{11\pm1}{30}$

$x_1 = \frac{11+1}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

$x_2 = \frac{11-1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

- Επειδή $e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{10}x^2 + \frac{2}{5}x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} > 0 \Leftrightarrow$$

$$15x^2 - 11x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

x	-∞		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$
- Γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$
-

Δ2. Αφού $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ θα είναι $P(\mathrm{A}) \le P(\mathrm{B})$ οπότε

$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$ και $P(\mathrm{B}) = \frac{2}{5}$

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ οπότε $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \varnothing$ οπότε $\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$ οπότε $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{2}{5}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$

Δ3. α) $f\left(x\right)=h\left(x\right)\Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}\Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x=\frac{3x^3}{10}-\frac{x^2}{5}-\frac{1}{15}x\Leftrightarrow 10x^3-11x^2+4x=9x^3-6x^2-2x$

$\Leftrightarrow 10x^3-9x^3-11x^2+6x^2+4x+2x=0\Leftrightarrow x^3-5x^2+6x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-5x+6\right)=0$

$x=0$ ή $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\mathrm{x}=2$ *ή* $\mathrm{x}=3$.

$\alpha=1,\quad \beta=-5,\quad \gamma=6$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-5\right)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}$

$x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$

$x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

β) $\nu_1=2x_1+1=2\cdot 0+1=1$

$\nu_2=2x_2+1=2\cdot 2+1=5$

$\nu_3=2x_3+1=2\cdot 3+1=7$

$\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3=1+5+7=13$

$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{0\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 7}{13}=\frac{10+21}{13}=\frac{31}{13}$.