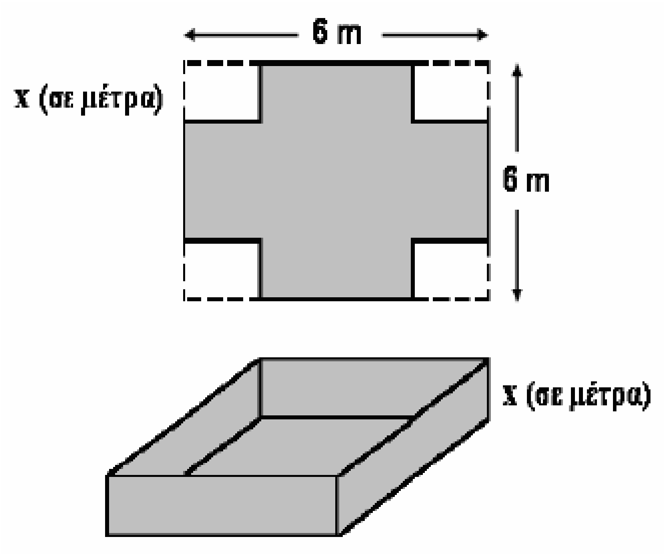
Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$f(x)=4x(3-x)^2$, 0<x<3 **Μονάδες 4**

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ). **Μονάδες 4**

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο. **Μονάδες 6**

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+2)-8}{x}$

Δ4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i=f(x_i)$, i=1,2,3,4,5 με $1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y}=12$, τυπική απόκλιση $s_y=2$ και συντελεστή μεταβολής CV_y.

Να βρείτε το εύρος R των τιμών yi, i=1,2,3,4,5. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ με –12<α<0 ο οποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i, προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε: $CV=2CV_y+\frac{R}{12}$ **Μονάδες 6**

Δ5. Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν είναι Α≠ ∅, Β≠ ∅ και Α⊆Β, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{P(A)}{P(B)}\leq\left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2$$ **Μονάδες 5**

Λύση:

Δ1. Μετά την αποκοπή η βάση του παραλληλεπιπέδου είναι τετράγωνο πλευράς $(6-2x)=2(3-x)$ m και το ύψος του x.m

επομένως ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x)=(6-2x)^2 x=\left[2(3-x)\right]^2 x=2^2(3-x)^2 x=4(3-x)^2 x=4x(3-x)^2$$

Δ2. *(Σημείωση: Για να αποφύγω την χρήση του κανόνα παραγώγισης γινομένου γράφω:)*

$$f(x)=4x(3-x)^2=4x\left(9-6x+x^2\right)=4x\cdot 9-4x\cdot 6x+4x\cdot x^2=36x-24x^2+4x^3=4x^3-24x^2+36x$$

$$f'(x)=\left(4x^3-24x^2+36x\right)'=12x^2-48x+36=12\left(x^2-4x+3\right)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12\left(x^2-4x+3\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$$

α=1 , β= -4 γ=3

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \text{ απορρίπτεται γιατί } x<3 \\ x_2=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 12\left(x^2-4x+3\right)>0\Leftrightarrow x^2-4x+3>0\Leftrightarrow x<1 \text{ ή } x>3$$

Επειδή $0<x<3$ είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<1$.

x	0	1	3
$f'(x)=12\left(x^2-4x+3\right)$	+	0	-
$f(x)=x^3-9x^2+24x+6$	0 ↗	16	↘ 0

Αρα για x=1 m έχουμε το μέγιστο όγκο (ο οποίος είναι ίσος με $f(1)=4\cdot 1(3-1)^2=4\cdot 2^2=4\cdot 4=16\ m^3$.

Δ3. $f(x)=4x(3-x)^2$ οπότε:

$$f(x+2)=4(x+2)(3-x-2)^2=4(x+2)(1-x)^2=4(x+2)\left(1-2x+x^2\right)=4\left(x-2x^2+x^3+2-4x+2x^2\right)=$$

$$4\left(x^3-3x+2\right)=4x^3-12x+8.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-12x+8-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-12x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(4x^2-12\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2-12\right)=-12$$

Δ4. Στο διάστημα [1, 2] η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2 \Rightarrow f(1)=f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)>f(x_4)>f(x_5)=f(2)$

$f(x_1)$ είναι η μεγαλύτερη τιμή και $f(x_5)$ η μικρότερη οπότε:

$$R=f(x_1)-f(x_5)=f(1)-f(2)=16-8=8$$

Αν α ο ζητούμενος αριθμός τότε

Οπως γνωρίζουμε από εφαρμογή 3 σ.99 του σχολικού (προσάρμοσα τα γράμματα στην άσκηση):

3. Έστω y_1, y_2 ,..., y_ν ν παρατηρήσεις με μέση τιμή και τυπική απόκλιση s_y.

α) Αν v_1, v_2,..., v_ν είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν <u>προσθέσουμε</u> σε καθεμιά από τις y_1, y_2 ,..., y_ν μια σταθερά α, ισχύει ότι:

i) $\bar{v}=\bar{y}+\alpha$ ii) $s_v=s_y$

$$CV=2CV_y+\frac{R}{12} \Leftrightarrow \frac{s_v}{|\bar{v}|}=2\frac{s_y}{|\bar{y}|}+\frac{R}{12} \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}+\alpha|}=2\frac{s_y}{|\bar{y}|}+\frac{R}{12}$$

και αντικαθιστώντας με τα αριθμητικά δεδομένα έχουμε:

$$\frac{2}{|12+\alpha|}=2\frac{2}{|12|}+\frac{8}{12} \overset{12+\alpha>0}{\Leftrightarrow} \frac{2}{12+\alpha}=\frac{4}{12}+\frac{8}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{12+\alpha}=\frac{12}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{12+\alpha}=1 \Leftrightarrow 12+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=2-12=-10$$

Δ4. Αφού $A \neq \varnothing$ και $B \neq \varnothing$ θα είναι $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$.

Επιπλέον επειδή $A \subseteq B$ θα είναι $P(A) \leq P(B)$

Τέλος γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα είναι ένας αριθμός από 0 έως και 1 , οπότε συνολικά έχουμε:

$0 < P(A) \leq P(B) \leq 1$

Στο διάστημα (0,1] η συνάρτηση f είναι (όπως δείξαμε) γνησίως αύξουσα οπότε:

$$0 < P(A) \leq P(B) \leq 1 \Rightarrow f(P(A)) \leq f(P(B)) \Rightarrow 4P(A)(3-P(A))^2 \leq 4P(B)(3-P(B))^2 \Rightarrow$$

$$P(A)(3-P(A))^2 \leq P(B)(3-P(B))^2 \Rightarrow$$

- Είναι $P(B) > 0$
- Επίσης έχουμε:

$$P(A) \leq 1 \Rightarrow -P(A) \geq -1 \Rightarrow 3-P(A) \geq 3-1 \Rightarrow 3-P(A) \geq 2 \Rightarrow (3-P(A))^2 \geq 2^2 \Rightarrow (3-P(A))^2 \geq 4 > 0.$$

Αρα $P(B)(3-P(A))^2 > 0$ (ως γινόμενο θετικών), οπότε διαιρώντας με την παράσταση αυτή και τα δύο μέλη της τελευταίας ανίσωσης διατηρείται η φορά της ανίσωσης:

$$\frac{P(A)\cancel{(3-P(A))^2}}{P(B)\cancel{(3-P(A))^2}} \leq \frac{\cancel{P(B)}(3-P(B))^2}{\cancel{P(B)}(3-P(A))^2} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} \leq \left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2.$$