2012 ΘΕΜΑ Γ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμετυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο. **Μονάδες 7**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ν = 3 **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες. **Μονάδες 6**

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης. **Μονάδες 6**

Λύση:

Γ1. $$\lim_{x\to-1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left[\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2\right]}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2\left[x^2+3-4\right]}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left[x^2+3-4\right]}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2(-1-1)}{-1\left(\sqrt{(-1)^2+3}+2\right)}=\frac{2(-2)}{-1\left(\sqrt{1+3}+2\right)}$$

$$\frac{-4}{-1\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{4}{2+2}=\frac{4}{4}=1$$

Γ2. Εστω Α το ενδεχόμενο ένας μαθητής να μαθαίνει γαλλικά και Β το ενδεχόμενο να μαθαίνει Ισπανικά.Τότε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=\frac{3\nu+\nu+2-\nu-1}{\nu^2+1}=\frac{3\nu+1}{\nu^2+1}$$

Δείξαμε όμως στο Γ1 ότι :

$$P(A\cup B)=1\Leftrightarrow\frac{3\nu+1}{\nu^2+1}=1\Leftrightarrow\nu^2+1=3\nu+1\Leftrightarrow\nu^2=3\nu\Leftrightarrow\nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow\nu(\nu-3)=0$$

$\nu=0$ ή $\nu-3=0\Leftrightarrow\nu=0$ ή $\nu=3$

Επειδή όμως μας δίνεται ότι $\nu\geq 3$, δεκτή είναι η $\nu=3$.

Αρα $P(A)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}=\frac{3\cdot 3}{3^2+1}=\frac{9}{9+1}=\frac{9}{10}$

$$P(B)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}=\frac{5}{10}$$

$$P(A\cap B)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=\frac{4}{10}$$

Γ3. $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\frac{4}{10}=\frac{9+5-8}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ3. Αν Ω είναι το σύνολο των μαθητών της τάξης (δειγματικός χώρος) και $N(\Omega)$ το πλήθος τους, τότε

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

Αρα $P(A\cap B)=\frac{4}{10}\Leftrightarrow\frac{32}{N(\Omega)}=\frac{4}{10}\Leftrightarrow 4N(\Omega)=320\Leftrightarrow N(\Omega)=\frac{320}{4}\Leftrightarrow N(\Omega)=80$