Δίνεται η συνάρτηση ,

$$f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x} \quad x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω M(x,f (x)), x > 0 σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα y'y τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο K(x,0) και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα x'x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Λ(0,f (x)). Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου OKMΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. **Μονάδες 7**

Δ3. Έστω η ευθεία ε :y = λx + β, β ≠10, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1,f (1)). Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), i=1,2,...,10 της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε A ≠∅ και A∩B ≠ ∅, τότε να αποδείξετε ότι f (P(A))+ f (P(A∩B)) ≥ 2f (P(A∪B))

Μονάδες 5

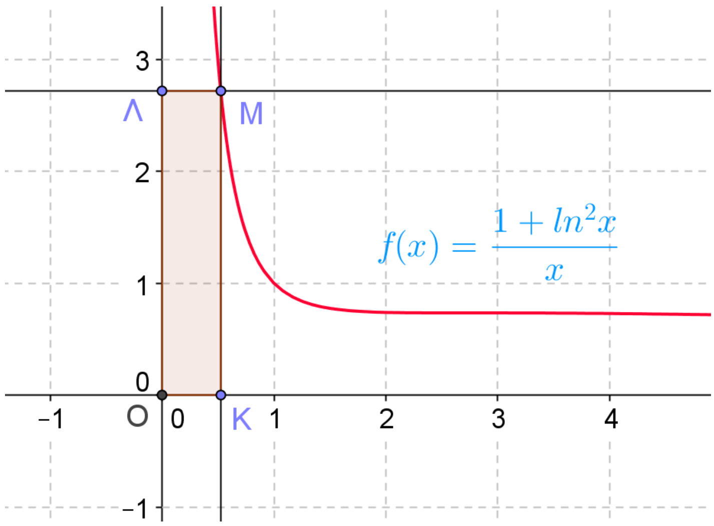
Λύση:

Δ1. $\left(1+\ln^2 x\right)'=0+2\ln x\left(\ln x\right)'=2\ln x\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$

$$f'(x)=\left(\frac{1+\ln^2 x}{x}\right)'=\frac{\left(1+\ln^2 x\right)'x-\left(1+\ln^2 x\right)x'}{x^2}=\frac{\frac{2}{x}\ln x\cdot x-\left(1+\ln^2 x\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=$$

$\frac{-\left(\ln^2 x-2\ln x+1\right)}{x^2}=-\frac{\left(\ln x-1\right)^2}{x^2}<0$ για κάθε $x\neq e$ οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ2. $(\text{MKO}\Lambda)=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x}=1+\ln^2 x$



Ειδωμένο το εμβαδό ως συνάρτηση του x (έστω h), έχουμε:

$h(x)=1+\ln^2 x$

$h'(x)=\left(1+\ln^2 x\right)'=2\ln x\cdot\left(\ln x\right)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln 1 \overset{\ln x \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x=1$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \overset{\ln x \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x>1$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	$h(1)=1$	↗

Αρα το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο για x=1, οπότε η μια διάσταση του ορθογωνίου είναι 1 και η άλλη διάσταση είναι : $f(1)=\dfrac{1+\ln^2 1}{1}=\dfrac{1+0}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

Δηλαδή το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο όταν είναι τετράγωνο

(Το εμβαδό είναι το $h(1)=1+\ln^2 1=1+0=1$ *μονάδες εμβαδού)*

Δ3. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης στο σημείο Σ(1,f(1)) έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)$.

Δεδομένου ότι όπως δείξαμε $f'(x)=-\dfrac{(\ln x-1)^2}{x^2}$ είναι:

$$f'(1)=-\frac{(\ln 1-1)^2}{1^2}=-\frac{(0-1)^2}{1}=-(-1)^2=-1.$$

Αρα η ε ως παράλληλη στην εφαπτομένη θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, επομένως

y = −1x + β.

Οπως γνωρίζουμε από εφαρμογή 3 σ.99 του σχολικού:

3. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ν παρατηρήσεις με μέση τιμή και τυπική απόκλιση s_x.

α) Αν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν <u>προσθέσουμε</u> σε καθεμιά από τις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ μια σταθερά c, να δειχτεί ότι:

i) $\bar{y}=\bar{x}+c$ ii) $s_y=s_x$

β) Αν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε σε καθεμιά από τις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ μια σταθερά c, να αποδειχτεί ότι:

i) $\bar{y}=c\bar{x}$ ii) $s_y=|c|s_x$

Αρα:

$\bar{y}=-\bar{x}+\beta=-10+\beta$ και

$s_y=|-1|s_x=s_x=2$

Θέλουμε:

$$CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\overline{y}|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 \le |-10+\beta| \Leftrightarrow 20 \le |\beta - 10|$$

$$\Leftrightarrow \beta - 10 \le -20 \text{ ή } \beta - 10 \ge 20 \Leftrightarrow \beta \le -20+10 \text{ ή } \beta \ge 10+20 \Leftrightarrow \beta \le -10 \text{ ή } \beta \ge 30 .$$

Δ4. Αφού $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ είναι $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \le \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

Αφού $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ είναι $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \le \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

Γνωρίζουμε ότι αν $\mathrm{A} \ne \varnothing$ ισχύει: $0<\mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1$ Επομένως:

$$0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}), \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}), \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \le 1$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] οπότε:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) \le \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A})) \ge \mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})) \quad (1)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \le \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})) \ge \mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))+\mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})) \ge \mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}))+\mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}))$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))+\mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})) \ge 2\mathrm{f}(\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}))$$