Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+1,\ x\in\mathbb{R}$

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, όπου $\omega_1=-1\quad \omega_2=0$ και $1<\omega_3<\omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i)=f(\omega_i)-\dfrac{1}{3}$ , όπου i = 1, 2

και $P(\omega_3)=-\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{12}$

**Δ1.** Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$A=\{\omega\in\Omega\,/\,f'(\omega)\le0\}\qquad B=\{\omega\in\Omega\,/\,f(\omega)>1\}$ και

$\Gamma=\left\{\omega\in\Omega\,/\,x^2+\omega x\ge-\dfrac{1}{4}\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\right\}$

**α)** Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$, $P(\omega_4)$. (μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ) και P(A-B) (μονάδες 8) **Μονάδες 16**

**Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x x ʹ γωνία $45^\circ$ **Μονάδες 4**

**Δ3.** Αν $M_\kappa(\omega_\kappa, y_\kappa)$, κ = 1, 2, 3, 4 είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): y = x + 1 με

$2\delta\omega_\kappa=\delta y_\kappa$ και $Ry_\kappa=5$

τότε να υπολογίσετε τα $\omega_3$ και $\omega_4$ του δειγματικού χώρου Ω, όπου

$\delta\omega_\kappa$ : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων Μκ ,

$\delta y_\kappa$ : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων Μκ και

$Ry_\kappa$ : το εύρος των τεταγμένων των σημείων Μκ **Μονάδες 5**

## Λύση:

**Δ1. α)** $f(x)=\frac{x}{x^2+1}+1$

$$f(\omega_1)=f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}+1=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$f(\omega_2)=f(0)=\frac{0}{0^2+1}+1=\frac{0}{1}+1=0+1=1$$

$$P(\omega_1)=f(\omega_1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(\omega_2)=f(\omega_2)-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}+1\right)'=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{f'(x)}{x-1}=\frac{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{x-1}=\frac{-\frac{(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x-1}{1}}=\frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2(x-1)}=-\frac{(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\frac{(x+1)}{(x^2+1)^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$P(\omega_3)=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$$

$$P(\omega_4)=1-\left(P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)\right)=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right)=1-\left(\frac{2}{12}+\frac{8}{12}+\frac{1}{12}\right)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

**β)**
- $f'(\omega)\le 0\Leftrightarrow -\frac{(\omega-1)(\omega+1)}{(\omega^2+1)^2}\le 0\Leftrightarrow \frac{(\omega-1)(\omega+1)}{(\omega^2+1)^2}\ge 0\Leftrightarrow (\omega-1)(\omega+1)\ge 0\Leftrightarrow \omega\le -1$ ή $\omega\ge 1$

Οπότε αφού $\omega\in\Omega$ θα είναι $\mathrm{A}=\{-1,\omega_3,\omega_4\}$

$$P(\mathrm{A})=P(-1)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

- $f(\omega)>1\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2+1}+1>1\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2+1}>0\Leftrightarrow \omega>0$

Οπότε αφού $\omega\in\Omega$ θα είναι $\mathrm{B}=\{\omega_3,\omega_4\}$

$$P(B)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

- $x^2+\omega x \ge -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2+4\omega x \ge -1 \Leftrightarrow 4x^2+4\omega x+1 \ge 0$.

Για να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει:

$\Delta \le 0 \Leftrightarrow (4\omega)^2-4\cdot 4\cdot 1 \le 0 \Leftrightarrow 16\omega^2-16 \le 0 \Leftrightarrow \omega^2-1\le 0 \Leftrightarrow -1\le\omega\le 1$

Οπότε αφού $\omega\in\Omega$ θα είναι ω=-1 ή ω=0.

Αρα $\Gamma=\{\omega_1,\omega_2\}=\{-1,0\}$

$P(\Gamma)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

$P(A-B)=P(-1)=\frac{1}{6}$

**Δ2.** Εστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης

Γνωρίζουμε ότι $\lambda=\varepsilon\varphi 45°=1$

Αρα $y=x+\beta$ και απομένει να υπολογίσω το β.

Αν $(x_0,f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής τότε γνωρίζουμε πως

$f'(x_0)=\lambda=1 \Leftrightarrow \frac{1-x_0^{\ 2}}{(x_0^{\ 2}+1)^2}=1 \Leftrightarrow 1-x_0^{\ 2}=(x_0^{\ 2}+1)^2 \Leftrightarrow 1-x_0^{\ 2}=x_0^{\ 4}+2x_0^{\ 2}+1 \Leftrightarrow$

$x_0^{\ 4}+2x_0^{\ 2}+1=1-x_0^{\ 2} \Leftrightarrow x_0^{\ 4}+3x_0^{\ 2}=0 \Leftrightarrow x_0^{\ 2}(x_0^{\ 2}+3)=0 \Leftrightarrow x_0^{\ 2}=0 \Leftrightarrow x_0=0$

Αρα $f(0)=1$

Αρα το σημείο επαφής είναι το $(0,1)$ και αυτό επαληθεύει την εξίσωσση της εφαπτομένης δηλαδή

$1=0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y=x+1$

**Δ3.**Επειδή $(-1=)\omega_1<\omega_2(=0)<\omega_3<\omega_4$ και έχουμε άρτιο πλήθος τετμημένων θα είναι όπως γνωρίζουμε: $\delta_{\omega_\kappa}=\frac{\omega_2+\omega_3}{2}$.

Από $\omega_1<\omega_2<\omega_3<\omega_4 \Rightarrow \omega_1+1<\omega_2+1<\omega_3+1<\omega_4+1 \Rightarrow y_1<y_2<y_3<y_4$ οπότε επειδή οι τετμημένες είναι και αυτές άρτιες σε πλήθος $\delta_{y_\kappa}=\frac{y_2+y_3}{2}$

$2\delta_{\omega_\kappa}=\delta_{y_\kappa} \Leftrightarrow 2\frac{\omega_2+\omega_3}{2}=\frac{y_2+y_3}{2} \Leftrightarrow \omega_2+\omega_3=\frac{\omega_2+1+\omega_3+1}{2} \Leftrightarrow 2\omega_2+2\omega_3=\omega_2+1+\omega_3+1 \Leftrightarrow \omega_2+\omega_3=2$

Και επειδή $\omega_2=0$ θα είναι $\omega_3=2$.

$R_{y_\kappa}=5 \Leftrightarrow y_4-y_1=5 \Leftrightarrow \omega_4+1-\omega_1-1=5 \Leftrightarrow \omega_4-\omega_1=5$

$\omega_4-(-1)=5 \Leftrightarrow \omega_4+1=5 \Leftrightarrow \omega_4=4$