Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x(2x-3)$ $x\in\mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

$P(A) = x_1$ και $P(B)=-\dfrac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

Β2. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\dfrac{1}{2}$ και $P(B)=\dfrac{2}{3}$ **Μονάδες 6**

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα **Μονάδες 5**

και

Β4. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{6}\le P(A'-B')\le\dfrac{2}{3}$ **Μονάδες 8**

Λύση:

Β1. Είναι $f(x)=2e^x(2x-3)$ οπότε:

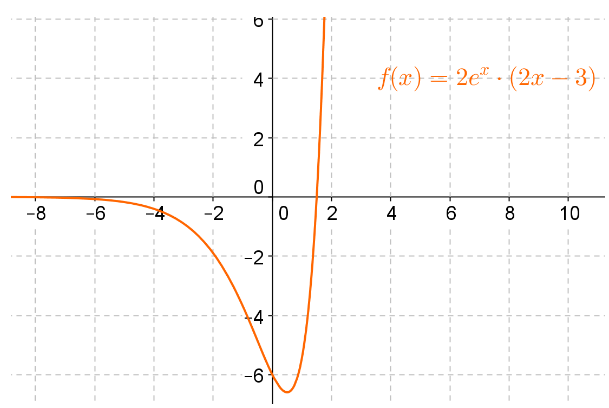
$$f'(x)=\left[2e^x(2x-3)\right]'=\left(2e^x\right)'(2x-3)+\left(2e^x\right)(2x-3)'=2e^x(2x-3)+2e^x\cdot 2=$$

$$2e^x(2x-3+2)=2e^x(2x-1)$$

Επειδή $2e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θα είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^x(2x-1)>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\sqrt{e}$	↗ $+\infty$



Αρα η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$.
- παρουσιάζει ελάχιστο στο $\dfrac{1}{2}$, το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2e^{\frac{1}{2}}\left(2\dfrac{1}{2}-3\right)=2\sqrt{e}(1-3)=-4\sqrt{e}$

B2. Αφού $x_1 = \frac{1}{2}$ είναι $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$ και αφού $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{e}$

$$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{2}{3}$$

B3. Αν τα γεγονότα ήταν ασυμβίβαστα τότε θα ίσχυε

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} > 1$$

που είναι άτοπο γιατί γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα οποιοδήποτε ενδεχομένου είναι αριθμός μεταξύ 0 και 1 οπότε και $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq 1$.

B4. $\mathrm{A}' - \mathrm{B}' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = \mathrm{B} - \mathrm{A}$ **(*)**

Ισχύει $\mathrm{B} - \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ οπότε και $\mathrm{A}' - \mathrm{B}' \subseteq \mathrm{B}$, συνεπώς $P(\mathrm{A}' - \mathrm{B}') \leq P(\mathrm{B})$

και επειδή $P(B) = \frac{2}{3}$ παίρνουμε: $P(\mathrm{A}' - \mathrm{B}') \leq \frac{2}{3}$ **(1)**

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \Rightarrow P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq P(\mathrm{A}) \Rightarrow -P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geq -P(\mathrm{A}) \Rightarrow P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geq P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A})$$

$$\Rightarrow P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \geq P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \, (*)$$

$$P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(\mathrm{B} - \mathrm{A})$$

Αρα αν αντικαταστήσουμε στην (*) έχουμε:

$$P(B) - P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \leq P(\mathrm{A}) \Leftrightarrow P(B) - P(\mathrm{A}) \leq P(\mathrm{B} - \mathrm{A})$$

Αντικαθιστούμε τα $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$ και έχουμε:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \leq P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{6} \leq P(\mathrm{A}' - \mathrm{B}') \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** το ζητούμενο.