2013 ΘΕΜΑ Β Ανάλυση-Πιθανότητες

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$A=\{\omega_1,\ \omega_4\}$, και $B=\{\omega_1,\ \omega_3\}$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1)=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

- $f(x)=\dfrac{x}{3}\ln x$, $\quad x>0$

B1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1)=\dfrac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\dfrac{1}{3}$ **Μονάδες 10**

B2. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{3}\le P(A')\le\dfrac{3}{4}$, όπου A′ το συμπληρωματικό του A. **Μονάδες 7**

B3. Αν $P(A')=\dfrac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, P[(A −B)∪(B − A)] και P(A′-B′) , όπου B′ το συμπληρωματικό του B . **Μονάδες 8**

Λύση:

B1. $$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{\left(x^3+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1^2}{\left(x^3+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$\frac{x^2+x+1-1}{\left(x^3+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{x^2+x}{x\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{1}{(-1)\left(\sqrt{(-1)^2+(-1)+1}+1\right)}=\frac{1}{(-1)\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{(-1)2}=-\frac{1}{2}$$

Αρα: $P(\omega_1)=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}==-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

- Ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος

$$f'(x)=\left(\frac{x}{3}\ln x\right)'=\left(\frac{x}{3}\right)'\ln x+\frac{x}{3}(\ln x)'=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}$$

$$P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}\ln 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Β2. $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ οπότε αφού $\{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \le P(A') \Rightarrow \frac{1}{3} \le P(A')$

Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\} \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ επομένως

$P(A') \le P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = 1 - P(\omega_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Β3. • $P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow$

$P(\omega_2) = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$.

• $P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = 0$

Παραλλαγή: $P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$

$P(\omega_4) = \frac{1}{4} - P(\omega_1) \Rightarrow P(\omega_4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

• $P[(A-B) \cup (B-A)] = P[\{\omega_4\} \cup \{\omega_3\}] = P(\omega_4) + P(\omega_3) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Εναλλακτικά:

$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$

$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$

$\frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2P(\omega_1) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{3}{12} + \frac{7}{12} - \frac{6}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Είναι φανερό συγκρίνοντας την έκταση των δύο λύσεων ότι είναι υπερβολικό να δουλέψουμε έτσι.

• $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$, $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

$A' - B' = \{\omega_3\}$

Άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.