2013 ΘΕΜΑ Δ Ανάλυση-Στατιστική - Πιθανότητες

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη **(ε)** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1,f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε , με $E < 2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ **Μονάδες 2**

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31

(Μονάδες 4)

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^\alpha \beta^\gamma \gamma^\gamma = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και την μέση τιμή των τιμών $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x)= x\ln x +2$ **Μονάδες 7**

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n,\ n=1,2,3,...,30:\ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < ... < t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

A={ $t \in \Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(t,f(t))$, να σχηματίζει με τον άξονα x'x οξεία γωνία },

B={$t \in \Omega$: $f(t) > f'(t)+1$},

όπου $f(t) = t\ln t + 2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

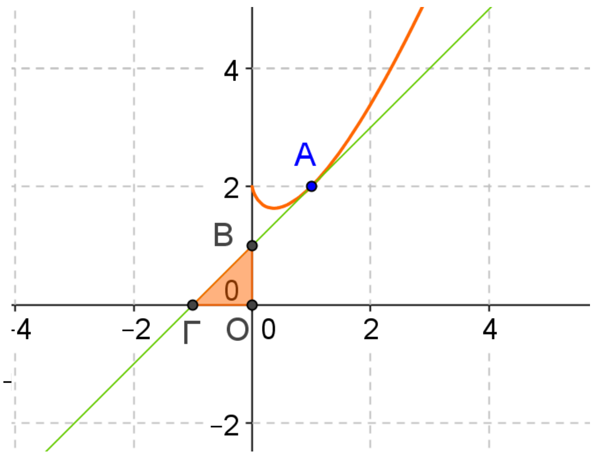
α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α **(μονάδες 3)**

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β **(μονάδες 4)**

Μονάδες 7

Λύση:

Δ1. • Είναι: $f(1)=1\cdot ln\ 1+\kappa=1\cdot 0+\kappa=\kappa$



Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1,f(1))= (1,κ) είναι $\lambda=f'(1)$.

Βρίσκουμε λοιπόν αρχικά την παράγωγο συνάρτηση της f :

$$f'(x)=(xln\ x+\kappa)'=(x)'ln\ x+x(ln\ x)'+0=ln\ x+x\frac{1}{x}=ln\ x$$

Αρα: $\lambda=f'(1)=ln\ 1+1=0+1=1$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής

$y=x+\beta$. Απομένει να βρούμε το β.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο (1,κ), οι συντεταγμένες του θα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας:

$\kappa=1+\beta\Leftrightarrow\beta=\kappa-1$

Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\boxed{y=\mathrm{x}+\kappa-1}$

• Βρίσκουμε τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες:

Για x=0: $y=\kappa-1$ και για

Για y=0: $0=x+\kappa-1\Leftrightarrow x=1-\kappa$

• Αρα $\mathrm{E}=\frac{1}{2}|\kappa-1||1-\kappa|\overset{\kappa>1}{=}\frac{1}{2}(\kappa-1)(\kappa-1)=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2$

$$\mathrm{E}<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2\Leftrightarrow(\kappa-1)^2<4\Leftrightarrow\sqrt{(\kappa-1)^2}<\sqrt{4}\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow-2<\kappa-1<2$$

$$\Leftrightarrow-2+1<\kappa<1+2\Leftrightarrow-1<\kappa<3$$

Επειδή κ ακέραιος με κ>1 συμπεραίνουμε ότι κ=2

Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι τελικά η $y=\mathrm{x}+2-1\Leftrightarrow\boxed{y=\mathrm{x}+1}$

Δ2. $\overline{y}=\overline{x}+1\Leftrightarrow\overline{x}+1=\overline{y}\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{y}-1\Rightarrow\overline{x}=31-1=30$

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{50}x_i=50\overline{x}\Rightarrow\sum_{i=1}^{50}x_i=50\cdot 30=1.500$$

Αν v_1, v_2, v_3, …., v_{50} είναι οι νέες τετμημένες που προκύπτουν από την διαδικασία που περιγράφεται έχουμε:

$v_i=x_i+3\qquad i=1,2,...,20$

$v_i=x_i\qquad i=21,...,35$

$v_i=x_i-\lambda\qquad i=36,...,50$

$$\overline{v}=\frac{\sum_{i=1}^{50}v_i}{50}=\frac{\sum_{i=1}^{20}v_i+\sum_{i=21}^{35}v_i+\sum_{i=36}^{50}v_i}{50}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i+3)+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}(x_i-\lambda)}{50}=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i+20\cdot 3+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}x_i-15\cdot\lambda}{50}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i+60-15\cdot\lambda}{50}=\frac{1.500+60-15\cdot\lambda}{50}$$

Άρα $\frac{1.500+60-15\cdot\lambda}{50}=31\Leftrightarrow 1500+60-15\cdot\lambda=1550\Leftrightarrow 1500+60-1550=15\lambda\Leftrightarrow 15\lambda=10\Leftrightarrow$

$\lambda=\frac{10}{15}\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$

Δ3. Εχουμε βρεί ότι: $f'(x)=ln\ x+1$ οπότε:

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=ln\left(\frac{1}{e}\right)+1=-\ln e+1=-1+1=0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow ln\ x+1=0\Leftrightarrow ln\ x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow ln\ x+1>0\Leftrightarrow ln\ x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘		↗	$+\infty$

Αφού στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$, έχουμε:

$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+2=\frac{1}{e}(\ln 1-\ln e)+2=\frac{1}{e}(0-1)+2=2-\frac{1}{e}$

Είναι $e>2\Rightarrow\frac{1}{2}>\frac{1}{e}\Rightarrow-\frac{1}{2}<-\frac{1}{e}\Rightarrow 2-\frac{1}{2}<2-\frac{1}{e}\Rightarrow\frac{3}{2}<2-\frac{1}{e}$

Άρα $f\left(\frac{1}{e}\right)>0=f'\left(\frac{1}{e}\right)$ οπότε $0=f'\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

Αρα εύρος $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=f(e)-0=f(e)=e\ln e+2=e+2$

Η ζητούμενη μέση τιμή είναι:

$$\bar{y}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2+0}{5}=\frac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+e+8}{5}$$

Ομως από την σχέση $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}$ λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}\Leftrightarrow\ln\left(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}\right)=\ln\left(e^{7}\right)\Leftrightarrow\ln\left(\alpha^{\alpha}\right)+\ln\left(\beta^{\beta}\right)+\ln\left(\gamma^{\gamma}\right)=7\ln e\Leftrightarrow\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7$$

Αντικαθιστώντας στην παράσταση του $\bar{y}$ που βρήκαμε πιο πάνω:

$$\bar{y}=\frac{7+e+8}{5}=\frac{15+e}{5}=\frac{15}{5}+\frac{e}{5}=3+\frac{e}{5}$$

Δ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t,f(t)) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$f'(t)=(t\ln t+2)'=\ln t+1$$

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με την εφαπτομένη της γωνίας ω $(0°\leq\omega<180°)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα των x, $\lambda=f'(t)=$εφω η γωνία είναι οξεία άν και μόνο άν:

$$\varepsilon\varphi\omega\geq 0\Leftrightarrow f'(t)\geq 0\Leftrightarrow \ln t+1\geq 0\Leftrightarrow \ln t\geq -1\Leftrightarrow e^{\ln t}\geq e^{-1}\Leftrightarrow t\geq\frac{1}{e}$$

> ***Υπενθύμιση***:*Γεωμετρία §2.13 Μια κυρτή γωνία λέγεται οξεία αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία.Η μηδενική γωνία είναι κυρτή οπότε και αυτή πρέπει να θεωρίται οξεία.*

$A=\{t_{11},t_{12},\ t_{13},\ldots,t_{30}\}$ οπότε $N(A)=20$ και επομένως:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

$$f(t)>f'(t)+1\Leftrightarrow t\ln t+2>\ln t+1+1\Leftrightarrow t\ln t>\ln t\Leftrightarrow t\ln t-\ln t>0\Leftrightarrow \ln t(t-1)>0\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$$

t	0		1		∞
lnt		-	0	+	
t-1		-	0	+	
P(x)		+		+	

οπότε $B=\Omega-\{1\}=\Omega-\{t_{30}\}$, οπότε $B=\{t_1,t_2,\ t_3,\ldots,t_{29}\}$

$A\cap B=\{t_{11},t_{12},\ t_{13},\ldots,t_{29}\}$ δηλαδή $N(A\cap B)=19$ και από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας:

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}.$$