2014 Επαναληπτικές ΘΕΜΑ Γ Ανάλυση - Πιθανότητες

Έστω $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση

$$P(K) = \frac{\alpha}{\kappa^2 + 1}, \quad \kappa \in \Omega \quad \text{με } \alpha > 0$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α , Β του Ω με

$$A = \{\kappa \in \Omega / \kappa^2 > 1\}$$

$$B = \{\kappa \in \Omega / (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0\}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{5}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω. **Μονάδες 8**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{11}$ $P(B) = \frac{6}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ : «να πραγματοποιείται το Β και όχι το Α »

Δ: «να μην πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται το Β». **Μονάδες 10**

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \ \kappa \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

Ε = { κ∈Ω η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα }.

Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο Ε είναι βέβαιο. **Μονάδες 7**

Λύση:

Γ1. $P(-1) = \frac{\alpha}{(-1)^2 + 1} = \frac{\alpha}{1+1} = \frac{\alpha}{2}$

$$P(0) = \frac{\alpha}{0^2 + 1} = \frac{\alpha}{0+1} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

$$P(1) = \frac{\alpha}{1^2 + 1} = \frac{\alpha}{1+1} = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(2) = \frac{\alpha}{2^2 + 1} = \frac{\alpha}{4+1} = \frac{\alpha}{5}$$

$$P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{10} + \frac{10\alpha}{10} + \frac{5\alpha}{10} + \frac{2\alpha}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{22\alpha}{10} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{10}{22} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{11}$$

Αρα $P(-1) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{5}{11}}{2} = \frac{5}{22}, \quad P(0) = \alpha = \frac{5}{11}, \quad P(1) = \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{22}, \quad P(2) = \frac{\alpha}{5} = \frac{\frac{5}{11}}{5} = \frac{5}{5 \cdot 11} = \frac{1}{11}$

Γ2. • Με αντικατάσταση διαπιστώνουμε ότι μόνο το στοιχείο 2 του Ω επαληθεύει την $\kappa^2 > 1$, οπότε $\mathrm{A} = \{2\}$.

Αρα $P(\mathrm{A}) = P(2) = \frac{1}{11}$

• $(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)(\kappa + 1)(\kappa - 2)(\kappa + 2) = 0 \Leftrightarrow \kappa - 1 = 0$ ή $\kappa + 1 = 0$ ή $\kappa - 2 = 0$ ή $\kappa + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \kappa = 1$ ή $\kappa = -1$ ή $\kappa = 2$ ή $\kappa = -2$ κι επειδή $\kappa \in \Omega$

$\mathrm{B} = \{-1, 1, 2\}$

οπότε $P(\mathrm{B}) = 1 - P(\mathrm{B}') = 1 - P(0) = 1 - \frac{5}{11} = \frac{11}{11} - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$

• Είναι $\Gamma = \mathrm{B} - \mathrm{A} = \{-1, 1\}$

$\mathrm{P}(\Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = \frac{6}{11} - \mathrm{P}(2) = = \frac{6}{11} - \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$

β' τρόπος: $\mathrm{P}(\Gamma) = \mathrm{P}(-1) + \mathrm{P}(1) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = \frac{5}{11}$

• Είναι $\Delta = \mathrm{A}' \cup \mathrm{B}'$

$\mathrm{A} = \{2\}$ άρα $\mathrm{A}' = \{-1, 0, 1\}$

$\mathrm{B} = \{-1, 1, 2\}$ άρα $\mathrm{B}' = \{0\}$

Αρα $\Delta = \mathrm{A}' \cup \mathrm{B}' = \{-1, 0, 1\}$

$\mathrm{P}(\Delta) = \mathrm{P}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}') = 1 - P(2) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

Γ3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \Omega$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1\right)' = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{\kappa}{2}2x + \frac{9}{4} = x^2 + \kappa x + \frac{9}{4}$$

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα πρέπει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την προυπόθεση ότι $f'(x) = 0$ ισχύει για μεμονωμένα x (δηλαδή όχι για διάστημα)

Θέλουμε λοιπόν $x^2 + \kappa x + \frac{9}{4} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το οποίο ισχύει όπως μάθαμε στην Α Λυκείου για:

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4 \cdot \frac{9}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 9 \leq 0$. Η ανίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε στοιχείο του Ω οπότε $\mathrm{E} = \Omega$ δηλαδή πράγματι το Ε είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.