

2014 Επαναληπτικές ΘΕΜΑ Δ Ανάλυση-Στατιστική-Πιθανότητες

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 100 m. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του AB τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος ΑΓ να είναι x m.

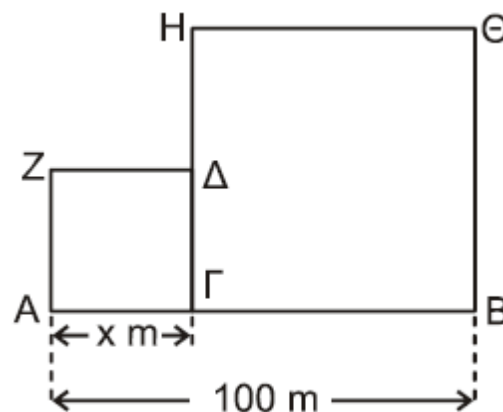
Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΖ και ΓΒΘΗ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του x, είναι

$$E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, \quad x \in (0, 100)$$

(μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν E(x) γίνεται ελάχιστο. **(μονάδες 5)**



Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για x = 50, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ σε ν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ με αντίστοιχα μήκη x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Αν η μέση τιμή των μηκών x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι $\bar{x} = 2$ και η τυπική τους απόκλιση είναι $s = 0,2$ τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι $n = 25$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα ℓ_i με αντίστοιχα μήκη x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, 25$.

Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right\}$$

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i , $i = 1, 2, \dots, 25$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$\Lambda = \{ \ell_i, i = 1, 2, \dots, 25 \text{ τέτοιο, ώστε ο δείκτης } i \text{ να είναι πολλαπλάσιο του } 3 \text{ ή πολλαπλάσιο του } 4 \}$.

Μονάδες 6

Λύση:

$$(ΑΓΔΖ) = x^2 \text{ και } (ΓΒΘΗ) = (100 - x)^2 = 10000 - 2 \cdot 100x + x^2 = 10000 - 200x + x^2$$

$$\text{Άρα } E(x) = (ΑΓΔΖ) + (ΓΒΘΗ) = x^2 + 10000 - 200x + x^2 = 2x^2 - 200x + 10000$$

Επειδή τα x και (100-x) εκφράζουν μήκη είναι θετικοί αριθμοί. Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 100 - x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 100 > x \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < 100 \Leftrightarrow x \in (0, 100)$$

$$E'(x) = (2x^2 - 200x + 10000)' = 2 \cdot 2x - 200 = 4x - 200$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 200 = 0 \Leftrightarrow 4x = 200 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{200}{4} \Leftrightarrow x = 50$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 200 > 0 \Leftrightarrow 4x > 200 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} > \frac{200}{4} \Leftrightarrow x > 50$$

x	0	50	100	
E'(x)		-	0	+
E(x)	10.000			10.000

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό γίνεται ελάχιστο για $x=50$ m.

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i = 50 \text{ οπότε}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\bar{x}} = \frac{50}{2} = 25$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu} \right\} \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu^2} \Leftrightarrow s^2 = \bar{E}_i - \frac{(\nu \bar{x})^2}{\nu^2} \Leftrightarrow s^2 = \bar{x}^2 - \frac{\nu^2 \bar{x}^2}{\nu^2} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = s^2 + \bar{x}^2 \Rightarrow \bar{x}^2 = 0,2^2 + 2^2 \Rightarrow \bar{x}^2 = 0,04 + 4 = 4,04$$

$$\text{Ομως } E_i = x_i^2 \text{ οπότε } \bar{E} = \bar{x}^2 = 4,04 \text{ m}^2$$

Τα πολλαπλάσια του 3 από 1 έως 25 είναι:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

Τα πολλαπλάσια του 4 από 1 έως 25 είναι:

4, 8, 12, 16, 20, 24

Τα πολλαπλάσια του 3 ή 4 από 1 έως 25 είναι:

Λ3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24

$\Lambda = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24\}$

$$\text{Άρα } P(\Lambda) = \frac{12}{25}$$