Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι Ρ(Κ) = x_1, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(\mathrm{A}) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Κ), Ρ(Α) και Ρ(Π), όπου Ρ(Π) η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

Μονάδες 10

Γ2. Αν $P(\mathrm{K}) = \frac{1}{4}$ και $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»

Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»

Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη» **Μονάδες 9**

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο. **Μονάδες 6**

Λύση:

Γ1. $f'(x) = \left(4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1\right)' = 4 \cdot 3x^2 - \frac{7}{2}2x + 1 = 12x^2 - 7x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0$

$\alpha = 12, \quad \beta = -7, \quad \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 49 - 48 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 12} = \frac{7 \pm 1}{24}$

$x_1 = \frac{7+1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{7-1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$ ή $x > \frac{1}{3}$

Συντάσσουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία και τα ακρότατα της

$\mathrm{f}(\mathrm{x})$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε από το πινακάκι ότι η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{1}{3}$.Είναι $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ οπότε $P(K)=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{1}{3}$.

Αρα $P(\Pi)=1-P(K)-P(A)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$

Γ2. • $P(\Gamma)=P(K\cup A)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$

• Ούτε κόκκινη ούτε άσπρη σημαίνει ότι είναι πράσινη οπότε:

$$P(\Delta)=P\left((K\cup A)'\right)=P(\Pi)=\frac{5}{12}$$

• Να μην είναι πράσινη σημαίνει να είναι κόκκινη ή άσπρη $\Pi'=K\cup A$

$$A\cup\Pi'=A\cup(K\cup A)=K\cup A$$

$$P(E)=P(A\cup\Pi')=P(K\cup A)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

Γ3. Εστω $N(A)$ το πλήθος των άσπρων σφαιρών, $N(\Pi)$ το πλήθος των πράσινων σφαιρών και $N(\Omega)$ το πλήθος όλων των σφαιρών.Επειδή έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει ο κλασσικός ορισμός πιθανότητας.

$$N(A)=N(\Pi)-4\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}-\frac{4}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(A)=P(\Pi)-\frac{4}{N(\Omega)}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{N(\Omega)}\Leftrightarrow 12N(\Omega)\cdot\frac{1}{3}=12N(\Omega)\cdot\frac{5}{12}-12N(\Omega)\cdot\frac{4}{N(\Omega)}\Leftrightarrow 4N(\Omega)=5N(\Omega)-48\Leftrightarrow N(\Omega)=48$$