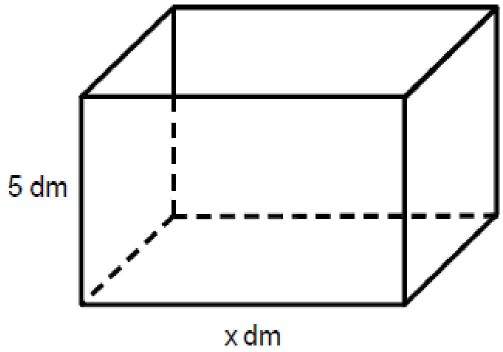

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και **ανοικτό από πάνω**.

- Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.
- Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι

$$\mathrm{E}(x) = -x^2 + 10x + 100 \quad x \in (0,\ 10)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$ όπου, $y_i = \mathrm{E}(x_i)$ i = 1, 2,...,15

με $5 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{14} < x_{15} = 9$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων x_i , i = 1, 2,...,15 των παραπάνω σημείων $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\overline{x} = 8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι s = 2 **(μονάδες 4)**

β) να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2, με i = 1, 2,...,15

Δίνεται ότι: $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu} \right\}$

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δ3. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία $A_i(x_i, y_i)$, i = 1, 2,...,15

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$\mathrm{B} = \left\{ \mathrm{A_i}(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i}),\ \text{τέτοια, ώστε } \mathrm{y_i} > -4\mathrm{x_i} + 9\mathrm{R} + 1 \right\},$$

όπου R είναι το εύρος των $y_i = \mathrm{E}(x_i)$, i = 1, 2,...,15 **Μονάδες 9**

Λύση:

Δ1. Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας είναι $E_\pi = \Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma = 20 \cdot 5 = 100 \text{ dm}^2$

Αν y dm είναι η άλλη διάσταση της βάσης

$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$

Επομένως η βάση έχει εμβαδό

$E_\beta = x(10 - x) \ \text{dm}^2$

Αρα η συνολική επιφάνεια είναι:

$E(x) = E_\beta + E_\pi = x(10-x) + 100 = 10x - x^2 + 100 = -x^2 + 10x + 100 \text{ dm}^2$, 0<x<10

$E'(x) = \left(-x^2 + 10x + 100\right)' = -2x + 10$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} = 5$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow -2x > -10 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x < 5$

x	0	5	10
$E'(x)$		+ 0 -	
$E(x)$	100	$\nearrow$ $E(5) = 125 \text{ dm}^2$ $\searrow$	100

Παρατηρούμε ότι το κουτί έχει την μεγαλύτερη επιφάνεια για x=5 dm (δηλαδή όταν η βάση είναι τετράγωνη).

Δ2. α) $2s^2 - 5s + 2 = 0$

$\alpha = 2 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$s_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$s_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$s_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Αφού δεν είναι ομοιογενές είναι:

$CV > \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s}{\bar{x}} > \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s}{8} > \frac{1}{10} \Rightarrow s > \frac{8}{10} \Rightarrow s > \frac{4}{5}$

Αρα από τις δύο λύσεις αυτή που ικανοποιεί τον επιπλέον περιορισμό είναι η s=2

β) $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^{\,2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right\}\Leftrightarrow s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^{\,2}}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu^2}\Leftrightarrow s^2=\overline{x^2}-\frac{(\nu\overline{x})^2}{\nu^2}\Leftrightarrow s^2=\overline{x^2}-\frac{\nu^2\overline{x}^2}{\nu^2}\Leftrightarrow$

$s^2=\overline{x^2}-\overline{x}^2\Leftrightarrow\overline{x^2}=s^2+\overline{x}^2\Rightarrow\overline{x^2}=2^2+8^2\Rightarrow\overline{x^2}=4+64\Rightarrow\overline{x^2}=68$

Δ3. Αφού $5=x_1<x_2<\ldots<x_{14}<x_{15}=9$ και η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[5,10)$ θα είναι

$\mathrm{E}(5)=\mathrm{E}(x_1)>\mathrm{E}(x_2)>....>\mathrm{E}(x_{14})=\mathrm{E}(x_{15})=\mathrm{E}(9)$

Αρα $\mathrm{R}=\mathrm{E}(5)-\mathrm{E}(9)=-5^2+10\cdot5+100-\left(-9^2+10\cdot9+100\right)=-5^2+50+\cancel{100}+9^2-90-\cancel{100}=$

$=-25+50+81-90=25-9=16$.

$\mathrm{y_i}>-4\mathrm{x_i}+9\mathrm{R}+1\Leftrightarrow-\mathrm{x_i}^2+10\mathrm{x_i}+100>-4\mathrm{x_i}+9\cdot16+1\Leftrightarrow-\mathrm{x_i}^2+14\mathrm{x_i}+100>144+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\mathrm{x_i}^2+14\mathrm{x_i}-45>0\Leftrightarrow\mathrm{x_i}^2-14\mathrm{x_i}+45<0$

$\alpha=1,\ \beta=-14\ \ \gamma=45$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-14)^2-4\cdot1\cdot45=196-180=16$

$x_{i_{1,2}}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{14\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{14\pm4}{2}$

$x_{i_1}=\frac{14+4}{2}=\frac{18}{2}=9$

$x_{i_2}=\frac{14-4}{2}=\frac{10}{2}=5$

Αρα $\mathrm{x_i}^2-14\mathrm{x_i}+45<0\Leftrightarrow5<\mathrm{x_i}<9$

Αρα $\mathrm{B}=\{\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3,....,x_{14}\}$

$\mathrm{P(B)}=\frac{\mathrm{N(B)}}{15}=\frac{13}{15}$