

ΘΕΜΑ Β Ανάλυση -- Πιθανότητες

Έστω A , B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A , $A \cap B$, και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2-3x-2=0$$

B1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. **Μονάδες 5**

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ : «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B ». **Μονάδες 8**

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

E : «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B ». **Μονάδες 6**

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα. **Μονάδες 6**

Λύση:

$$\mathbf{B1.} \quad (3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \text{ ή } 8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ή } 8x^2-6x+1=0$$

$$\alpha = 8, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 36 - 32 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm 2}{16}$$

$$x_1 = \frac{6-2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{6+2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

Αφού $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ θα είναι και $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ και συμπεραίνω ότι

$$\bullet P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \bullet P(A) = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \bullet P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{B2.} \quad P(A' - B') = P(A' \cap (B')') = P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$$

$$\text{Αντικαθιστώντας: } P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

Άρα:

$$P(A' - B') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

.

• Το πολύ ένα σημαίνει να μην συμβαίνουν και τα δύο. Το να συμβαίνουν και τα δύο είναι το $A \cap B$

.Άρα

$\Delta = (A \cap B)'$. Οπότε:

$$P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{B3.} \quad P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} - \frac{6}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{B4.} \quad \text{Λύνουμε την } 9x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\alpha = 9, \quad \beta = -3, \quad \gamma = -2$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) = 9 + 72 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 9} = \frac{3 \pm 9}{18}$$

$$x_1 = \frac{3-9}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{3+9}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Επειδή η πιθανότητα είναι πάντα αριθμός από 0 έως και 1 συμπεραίνουμε ότι: • $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$

Εστω ότι τα ενδεχόμενα B και Γ ήταν ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος δηλαδή

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα τα B και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα