

## 2015 ΘΕΜΑ Γ Στατιστική

Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα Ι, όπου  $f_i\%$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3<sup>η</sup> κλάση είναι  $108^\circ$ .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 14$ .

Κλάσεις	$f_i\%$
[8, 10)	
[10, 12)	
[12, 14)	
[14, 16)	
[16, 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f_1\% = 10, f_2\% = 10, f_3\% = 30, f_4\% = 20, f_5\% = 30$ . Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο. **Μονάδες 6**

**Γ2.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι  $\sqrt{6,6} \approx 2,57$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Έστω  $x_1, x_2, x_3, x_4$  τα κέντρα της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα και  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , οι συχνότητες της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4ης κλάσης αντίστοιχα. Αν  $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$ , βρείτε το πλήθος  $n$  των

παρατηρήσεων του δείγματος

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Έστω  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα  $n$  παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως  $\bar{\alpha}$  τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και

Σ $_{\alpha}$  την τυπική τους απόκλιση. Εάν  $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_{\alpha}}$ , για  $i=1, 2, 3, 4, 5$ , να δείξετε ότι η μέση τιμή  $\bar{\beta}$  του

δείγματος  $\beta_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4, 5$  είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση  $S_{\beta}$  είναι ίση με 1. **Μονάδες 7**

**Λύση:**

**Γ1.**

Κλάσεις	Κεντρική τιμή	$f_i \%$
[8, 10)	9	10
[10, 12)	11	10
[12, 14)	13	30
[14, 16)	15	20
[16, 18)	17	30

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 108^\circ = 360^\circ f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ .Αρα } f_3 = 30\% .$$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14$$

$$\Leftrightarrow 0,9 + 11 \cdot f_2 + 3,9 + 15 \cdot f_4 + 5,1 = 14 \Leftrightarrow 0,9 + 11 \cdot f_2 + 3,9 + 15 \cdot f_4 + 5,1 = 14 \Leftrightarrow$$

$$9,9 + 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 14 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 14 - 9,9 \Leftrightarrow \boxed{11f_2 + 15f_4 = 4,1} \quad \text{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow 0,7 + f_2 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 1 - 0,7 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3$$

$$\Leftrightarrow f_4 = 0,3 - f_2 \quad \text{(2)}$$

Αντικαθιστώ στην **(1)** και έχω:

$$11f_2 + 15(0,3 - f_2) = 4,1 \Leftrightarrow 11f_2 + 4,5 - 15f_2 = 4,1 \Leftrightarrow -4f_2 = 4,1 - 4,5 \Leftrightarrow -4f_2 = -0,4 \Leftrightarrow$$

$$4f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1 \text{ οπότε } f_2\% = 10$$

Πλέον από την **(2)** παίρνουμε  $\Leftrightarrow f_4 = 0,3 - f_2 = 0,3 - 0,1 = 0,2$  οπότε  $f_4\% = 20$ .

$$\text{Γ2. } s^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 f_i = (9 - 14)^2 0,1 + (11 - 14)^2 0,1 + (13 - 14)^2 0,3 + (15 - 14)^2 0,1 + (17 - 14)^2 0,3 =$$

$$(-5)^2 0,1 + (-3)^2 0,1 + (-1)^2 0,3 + 1^2 0,1 + 3^2 0,3 = 25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3$$

$$= 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 2,5 + 1,1 + 3 = 6,6$$

$$\text{Αρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,6} \approx 2,57 .$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} > \frac{2}{20} = \frac{1}{10} . \text{ Αρα το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές}$$

$$\Gamma 3. \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i \frac{v_i}{v} = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i f_i = \frac{1780}{v}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow 14 = \sum_{i=1}^4 x_i f_i + x_5 f_5 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 5,1 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} + 5,1 = 14$$

$$\frac{1780}{v} = 14 - 5,1 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow v = 200$$

$$\Gamma 4. \beta_i = \frac{1}{S_\alpha} \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha}$$

Αρα από γνωστή εφαρμογή: (σ. 99 σχολικού)

$$\bullet \bar{\beta} = \frac{1}{S_\alpha} \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0$$

$$\bullet S_\beta = \left| \frac{1}{S_\alpha} \right| S_\alpha = \frac{1}{S_\alpha} S_\alpha = 1$$