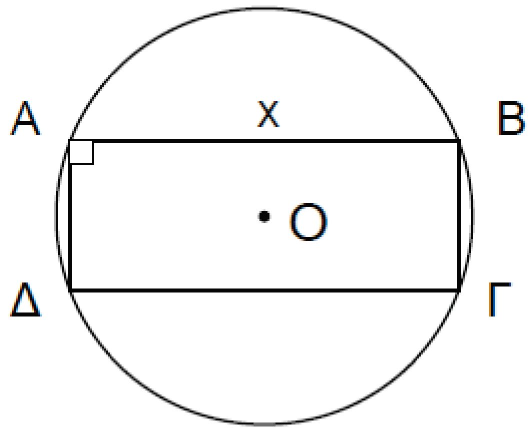
ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5 και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ=x, όπως φαίνεται στο Σχήμα Ι.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x)=x\sqrt{100-x^2}$, $\quad 0<x<10$. **Μονάδες 4**

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. **Μονάδες 5**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}$ **Μονάδες 8**

Δ4. Εστω Α, Β τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.Αν $P(A-B)>0$**, να δείξετε ότι**

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$ **Μονάδες 8**

Λύση:

Δ1.Το εμβαδό δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma\Delta)=AB\cdot A\Delta=x\cdot A\Delta$

Επειδή η γωνία $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και είναι ορθή το αντίστοιχο τόξο της $\overset{\frown}{\Delta B}$ θα είναι ημικύκλιο, οπότε η ΔΒ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα $\Delta B=2\cdot\rho=2\cdot 5=10$

Ετσι με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$A\Delta^2=B\Delta^2-AB^2 \Leftrightarrow A\Delta^2=10^2-x^2 \Leftrightarrow A\Delta=\sqrt{100-x^2}$$

Αρα αφού εκφράσαμε και τις δύο πλευρές του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x μπορούμε να γράψουμε το εμβαδό ως συνάρτηση του x ως

$f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

Επειδή το x είναι μέτρο μήκους θα είναι 0<x και επειδή η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο θα είναι:

$0 < x < 10$.

Δ2. $f'(x) = \left(x\sqrt{100 - x^2}\right)' = (x)'\sqrt{100 - x^2} + x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = 1 \cdot \sqrt{100 - x^2} + x\dfrac{\left(100 - x^2\right)'}{2\sqrt{100 - x^2}} =$

$$\sqrt{100 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} \Leftrightarrow x = \sqrt{25 \cdot 2} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Η λύση είναι αποδεκτή αφού $0 < 5\sqrt{2} < 10$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} > 0 \overset{\sqrt{100 - x^2} > 0}{\Leftrightarrow} 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > 100 \Leftrightarrow x^2 > 50 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{50} \Leftrightarrow$$

$$|x| > \sqrt{25 \cdot 2} \overset{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 5\sqrt{2}$$

x	0 $\quad$ $5\sqrt{2}$ $\quad$ 10
$f'(x)$	+ $\quad$ 0 $\quad$ –
$f(x)$	$\nearrow$ $\quad$ $\quad$ $\searrow$

Δ2. Αρα η τιμή του εμβαδού γίνεται μέγιστη για $x = 5\sqrt{2}$.Τότε όμως:

$$A\Delta = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 25 \cdot 2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AB$$

Αρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. *<u>Σκέψη</u>: Κατ' αρχάς αν αλλάξουμε την μεταβλητή από x σε h έχουμε:*

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-\sqrt{99}}{98h}=\frac{1}{98}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-\sqrt{99}}{h}$$ *Το* $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-\sqrt{99}}{h}$ *μας φέρνει στο μυαλό το*

$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ *για x_0=1.Μένει να το επιβεβαιώσουμε:*

Δεδομένου ότι $f(x)=x\sqrt{100-x^2}$ για x=1 παίρνουμε $f(1)=\sqrt{100-1^2}=\sqrt{99}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}f'(1)$$

Ομως δείξαμε ότι $f'(x)=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$ οπότε $f'(1)=\frac{100-2\cdot1^2}{\sqrt{100-1^2}}=\frac{100-2}{\sqrt{100-1^2}}=\frac{98}{\sqrt{99}}$

Αρα τελικά $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}$

Δ4. Είναι $A-B\subseteq A$ οπότε $P(A-B)\le P(A)$ και δεδομένου ότι από τα δεδομένα $0<P(A-B)$ και για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A)\le1$ έχουμε: $0<P(A-B)\le P(A)\le1$. Αφού όπως δείξαμε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ 5\sqrt{2}\right]$ θα ισχύει:

$$f(P(A-B))\le f(P(A))\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-P(A-B)^2}\le P(A)\sqrt{100-P(A)^2}\Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P(A-B)^2}\le P(A)\sqrt{100-P(A)^2}\Leftrightarrow\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}\quad\textbf{(1)}$$

Αφού $P(A-B)>0$ και $\sqrt{100-P(A)^2}>0$ θα είναι και $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}>0$ **(2)**

Επιπλέον :

$$\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{100-1^2}}=\frac{1}{\sqrt{99}}<1\quad\textbf{(3)}$$

και τελικά από **(1)**, **(2)** και **(3)** έχουμε:

$$0<\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}<1.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(0,\ 5\sqrt{2}\right]$ παίρνουμε:

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$ δηλαδή το ζητούμενο.